Niveau(x) d'enseignement: 3 Numéro EDUQ : 8370136
Centre d'intérêt: 841

Roy, J.

Formes et volumes = Shapes and volumes / [réd., J. Roy ; dessins et trad. anglaise, P. Allard]. -- Sherbrooke : Université de Sherbrooke, Département de mathématiques et d'informatique, [1981?].
[8, 8] p. : ill. ; 28 cm.

Titres des couv. Texte en français et en anglais tête-bêche.

Cote Dewey: 372.7/R888f Cote LC: QA/11

Descripteur(s): *Mathématiques *Perception visuelle *Jeu éducatif *Guide pédagogique *Primaire (Niveau)

Identificateur(s) de sujet: *Géométrie *Forme *Volume *Structuration des connaissances

Le document présente un matériel d'apprentissage permettant, dans l'univers de quelques hexaèdres, d'effectuer des transformations géométriques et d'en observer les effets relatifs à un certain nombre de propriétés qualitatives et quantitatives, plus précisément en ce qui a trait à la propriété quantitative de volume. Les transformations consistent essentiellement en la décomposition de parallélipipèdes en deux parties congrues et en la recomposition de celles-ci en polyèdres de formes diverses mais dont le volume est le même que celui des parallélipipèdes originaux. Le principal but visé par de telles activités est le discernement des notions de forme et de volume, notions indépendantes dans l'abstrait mais qui, dans la réalité, ne peuvent exister l'une sans l'autre.

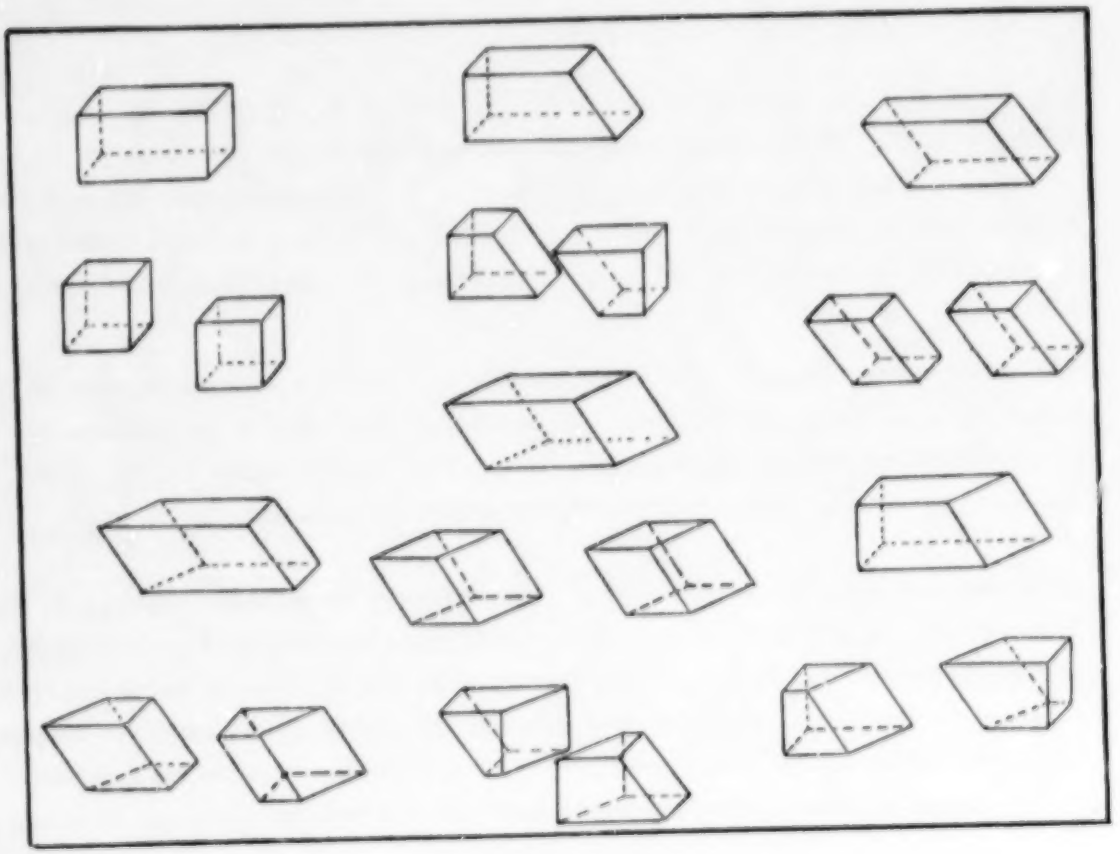
Type de document: d
Financement: Bénéficiaire - Université de Sherbrooke
Organisme(s) source(s) - MEQ
Programme(s) de subvention - FCAC
Auteur de l'analyse: ar

E D U Q 8370136

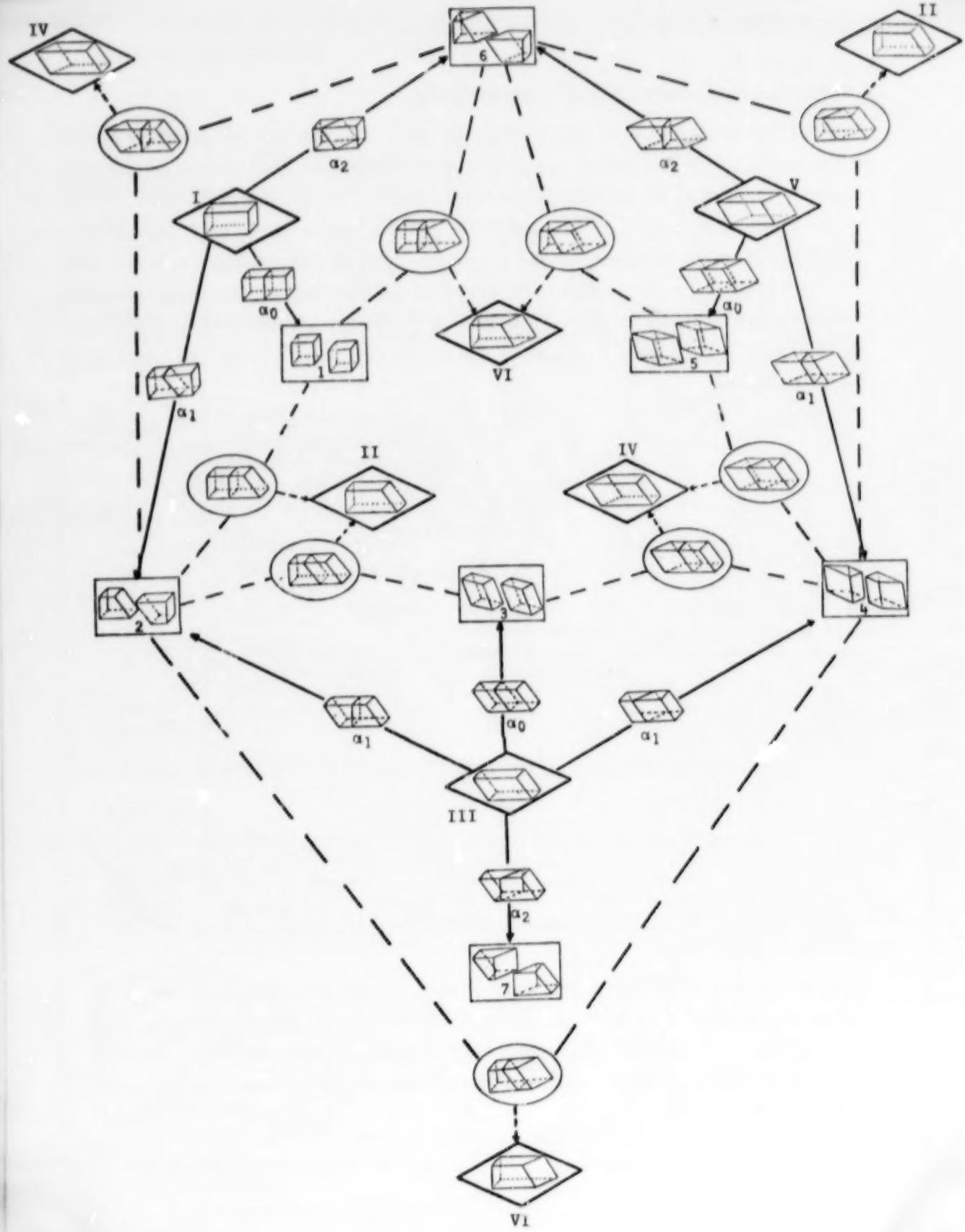
FORMES ET VOLUMES

DESCRIPTION GÉNÉRALE

Ce matériel d'apprentissage permet d'effectuer, dans l'univers de quelques hexaèdres, des transformations géométriques et d'en observer les effets relatifs à un certain nombre de propriétés qualitatives et quantitatives, plus particulièrement en ce qui a trait à la propriété quantitative de volume. Ces transformations consistent, essentiellement, en la décomposition de parallélipipèdes en deux parties congrues et en la recomposition de celles-ci en polyèdres de formes diverses mais dont le volume est le même que celui des parallélipipèdes originaux. Le but principal visé par de telles activités est le discernement des notions de forme et de volume, notions indépendantes dans l'abstrait, mais qui, dans la réalité d'où elles proviennent, ne peuvent exister l'une sans l'autre.



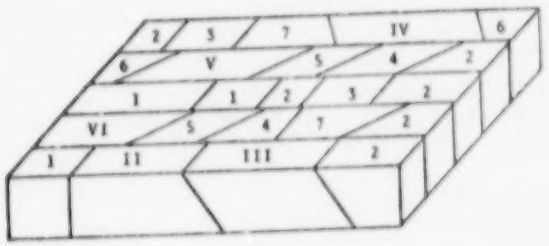
E D U Q 8370136

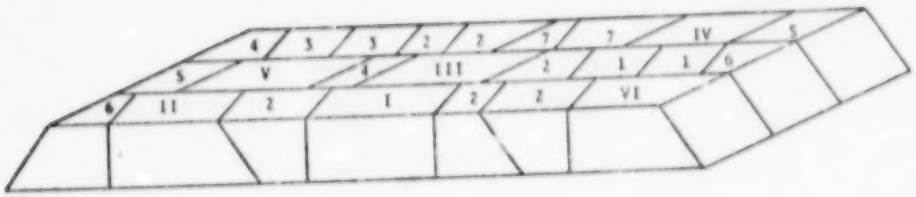


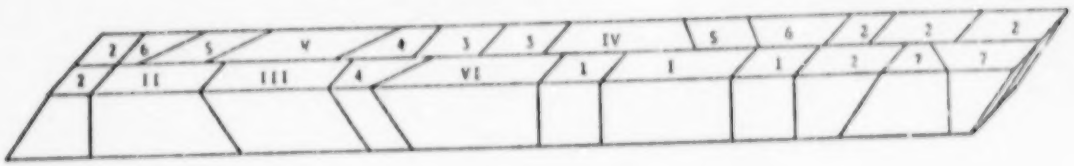
SUGGESTION D'ACTIVITÉS

A Réalisation de casse-tête tridimensionnels

En accordant la valeur d'une unité à un petit bloc obtenu par l'opération a, l'ensemble total des blocs, constitué tout d'abord de sept paires de petits blocs (14 unités) et de six grands blocs (12 unités), comportait donc 26 unités. Nous avons ajouté à cet ensemble initial quatre blocs no 2 (4 unités), portant ainsi le nombre d'unités à 30, parce qu'un tel ensemble offrait plus de diversité en ce qui concerne l'activité de casse-tête. Avec cet ensemble de 30 unités, il est en effet possible de réaliser des casse-tête ayant les dimensions suivantes: 1 par 30, 2 par 15, 3 par 10, 5 par 6. En voici quelques exemples:

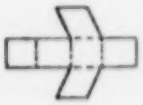
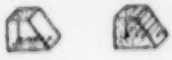
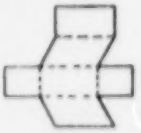
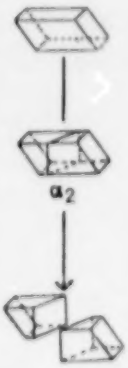
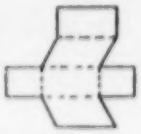






La réalisation d'une telle activité permet aux enfants d'explorer de façon ludique les possibilités de composition des blocs et, par là, d'explorer les propriétés qualitatives de ces objets géométriques. De plus, les divers casse-tête réalisés sont tous constitués des mêmes blocs et ont pour cela le même volume.

B Exploration des effets de l'opération α sur certaines propriétés qualitatives des hexaèdres

propriétés / opération	forme	nombre de paires de faces parallèles	nombre de parallélogrammes	prisme
α_0	ne modifie pas la forme	ne change pas le nombre de paires de faces parallèles	ne change pas le nombre de parallélogrammes 	conserve la qualité de prisme
α_1	modifie la forme	diminue de un le nombre de paires de faces parallèles 	 diminue de deux le nombre de parallélogrammes	conserve la qualité de prisme
 α_2	modifie la forme	diminue de un le nombre de paires de faces parallèles	 diminue de quatre le nombre de parallélogrammes	ne conserve pas la qualité de prisme

Pour plus de détails concernant les propriétés qualitatives des hexaèdres de la famille du cube, voir la brochure intitulée: HEXAÈDRES (8, 12).

C Exploration de la notion quantitative de volume en relation avec la notion qualitative de forme

Les activités qui suivent ont pour but d'illustrer, à l'aide du matériel, différents liens pouvant exister entre les notions de forme et de volume.

1. Comparaison de volume des petits blocs faisant partie d'une paire de blocs obtenue par l'opération α.

   L'opération α permet d'engendrer, à partir des parallélipipèdes I, III et V, sept paires de petits blocs, chacune de ces paires étant constituée de deux blocs congrus.

   Ex.:

congruence par symétrie

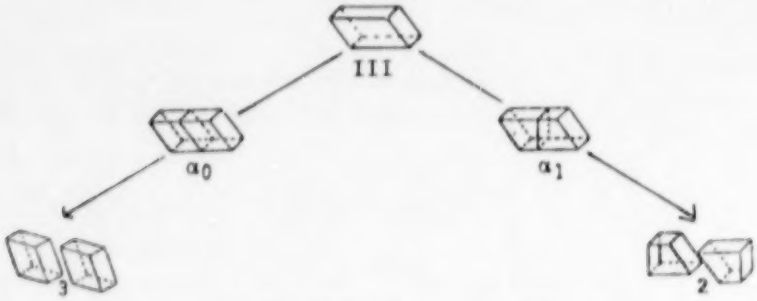
congruence par translation

   Chaque paire de blocs, puisqu'elle est constituée de deux blocs congrus, est donc constituée de deux blocs ayant même volume. Ainsi, chacune de ces paires de blocs est une illustration de la relation "...avoir même forme et même volume...".

2. Comparaison du volume des petits blocs et celui des grands blocs desquels ils sont issus.

   L'opération α, en engendrant à chaque fois deux petits blocs de même volume, engendre donc des blocs dont le volume est égal à la moitié de celui du parallélipipède sur lequel l'opération est effectuée.

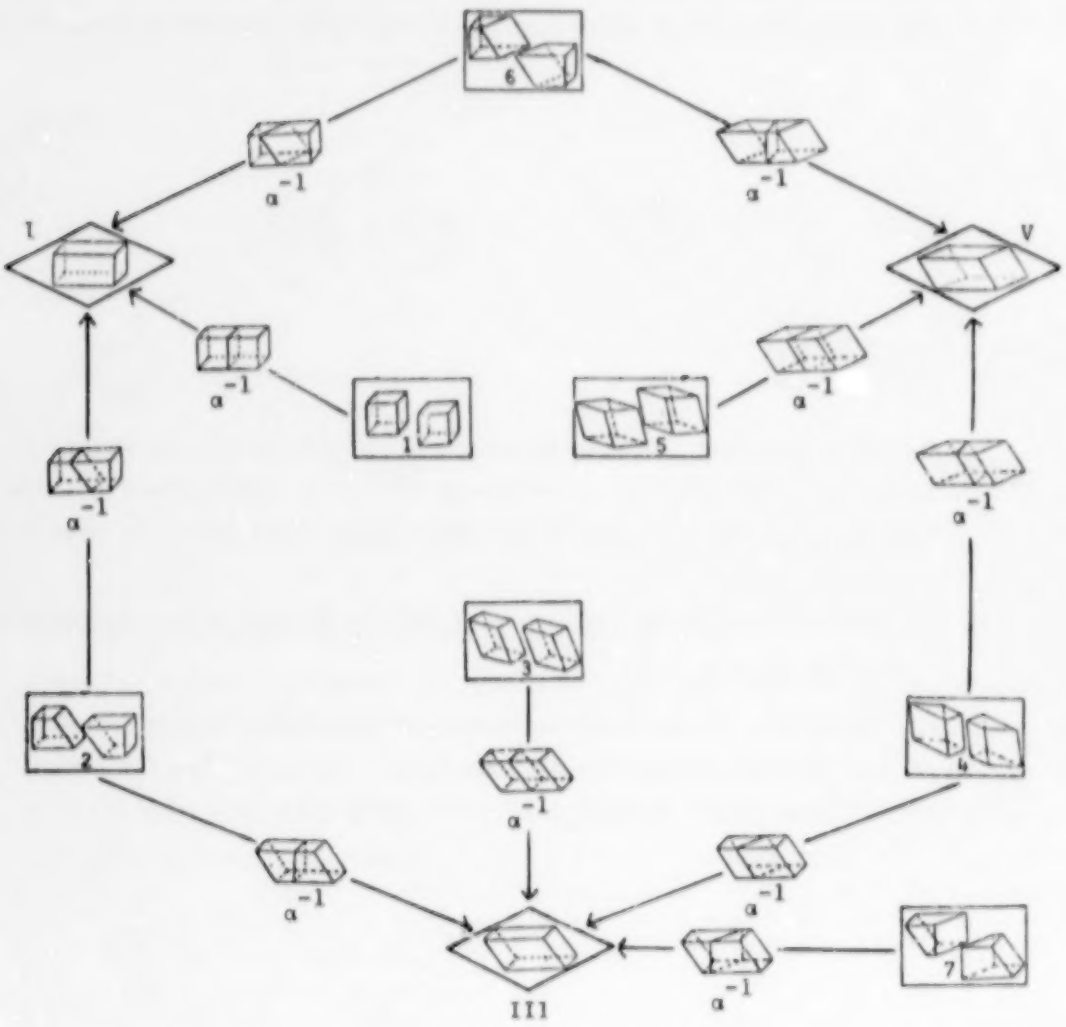
   Ex.:



   Ainsi avons-nous un exemple d'un changement de volume sans changement de forme (blocs III et 3), et un exemple de blocs qui sont différents et par leur forme et par leur volume (blocs III et 2).

3. Comparaison de volume de deux petits blocs non congrus.

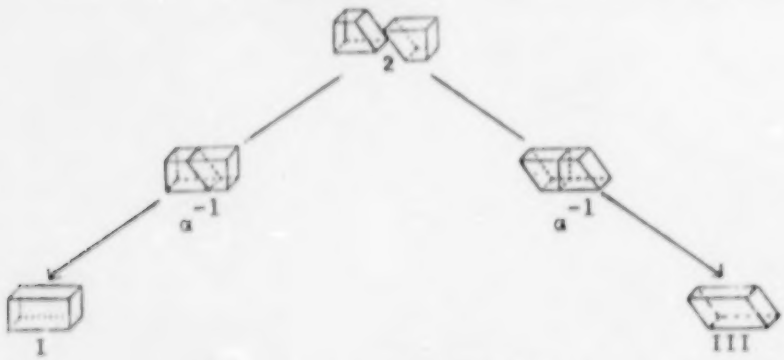
Cette comparaison peut s'effectuer au moyen de l'opération α^{-1}, c'est-à-dire en recherchant les différentes façons de recomposer les parallélipipèdes I, III et V.



Le schéma illustre, par exemple, la possibilité de recomposer le parallélipipède I à partir des blocs 1, 2 ou 6. Puisque ces blocs ont chacun un volume égal à la moitié de celui du parallélipipède I, ils ont donc tous même volume. De la même façon, on pourra établir l'équivalence de volume entre les blocs 4, 5 et 6, puis entre les blocs 2, 3, 4 et 7. Par transitivité, on arrivera finalement à la conclusion que les blocs 1 à 7, tous différents par la forme, ont cependant même volume.

4. Comparaison de volume des parallélipipèdes I, III et V.

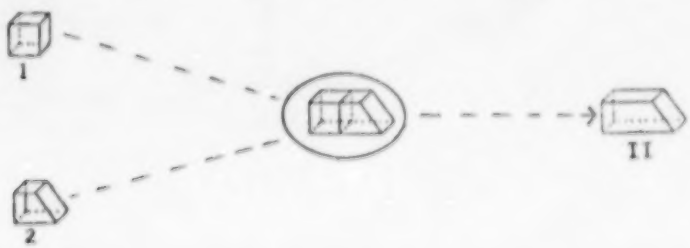
La comparaison de volume des parallélipipèdes I, III et V peut se réaliser en cherchant différentes façons de composer deux blocs congrus. Par exemple, en composant les blocs 2 de différentes façons, on peut former le parallélipipède I ou le parallélipipède III, ce qui montre l'équivalence de volume entre ces deux parallélipipèdes:



De façon analogue, on pourra constater l'équivalence de volume entre les blocs I et V et entre les blocs III et V. Nous avons ici une autre illustration de blocs ayant même volume sans avoir la même forme.

5. Comparaison du volume des blocs II, IV et VI avec celui des parallélipipèdes I, III et V.

Les blocs II, IV et VI sont obtenus au moyen de l'opération β, c'est-à-dire par la composition de deux blocs non congrus. Par exemple, le bloc II peut être formé à partir des petits blocs 1 et 2:



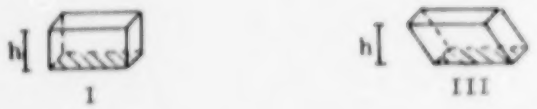
Puisque les blocs 1 et 2 ont chacun un volume égal à la moitié de celui du parallélipipède I, ces deux blocs ensemble ont donc un volume égal à celui du parallélipipède I. Ainsi peut-on conclure que le bloc II a un volume égal à celui du parallélipipède I et, par conséquent, égal à celui des parallélipipèdes III et V. Par un raisonnement analogue, on pourra établir l'équivalence de volume entre les blocs IV, VI et les trois parallélipipèdes.

D Découverte d'un lien existant entre les dimensions d'un bloc et son volume

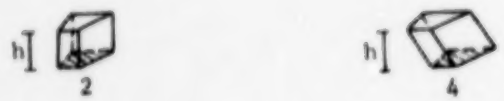
Les activités précédentes ont permis de répartir l'ensemble des blocs en deux classes relativement à la propriété quantitative de volume. En comparant la base et la hauteur de deux blocs faisant partie d'une même classe, il est possible de trouver des exemples illustrant la règle suivante: si deux blocs ont une base de même aire et la même hauteur correspondante, alors ils ont le même volume.

Exemples:

a) blocs I et III:

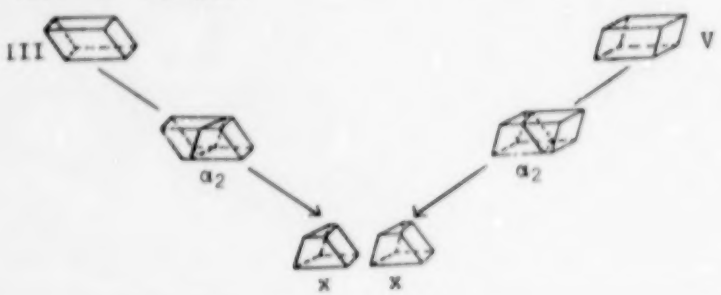


b) blocs 2 et 4:



E Recherche d'autres décompositions et compositions

Comme il a déjà été mentionné, d'autres décompositions et recompositions sont possibles permettant d'engendrer des blocs de formes diverses qui ne sont pas contenus dans le matériel. La recherche de ces nouveaux blocs peut se réaliser en cherchant d'autres façons d'effectuer les opérations α et β. En voici un exemple:



Création D. Lunkenbein
Réalisation du matériel H. Alberts, M. Zakorzenny
Rédaction J. Roy
Dessins (et traduction anglaise) P. Allard

Réalisé dans le cadre d'un projet de recherche en didactique de la mathématique subventionné par le Ministère de l'Education du Québec (F.C.A.C., EQ-646); Département de mathématiques et d'informatique, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec, Canada, J1K 2R1.

D Discovering a link between the dimensions of a block and its volume

The activities up to now enabled us to separate the set of blocks into two classes in relation with the quantitative property of volume. By comparing the basis and the height of two blocks of a same class, it is possible to find examples illustrating the following rule: if two blocks have a basis of identical area and a corresponding height, then they have the same volume.

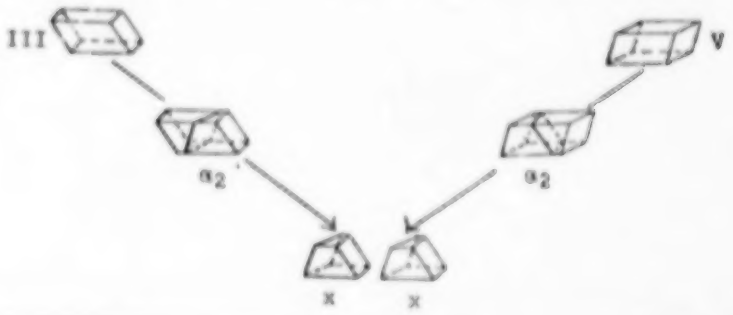
Examples:

a) blocks I and III:

b) blocks 2 and 4:

E Looking for other decompositions and compositions

As was mentioned previously, there are other decompositions and recompositions that could generate blocks of various shapes which are not found in the material itself. Such blocks can be obtained by finding other ways of performing operations α and β. Here is one example:

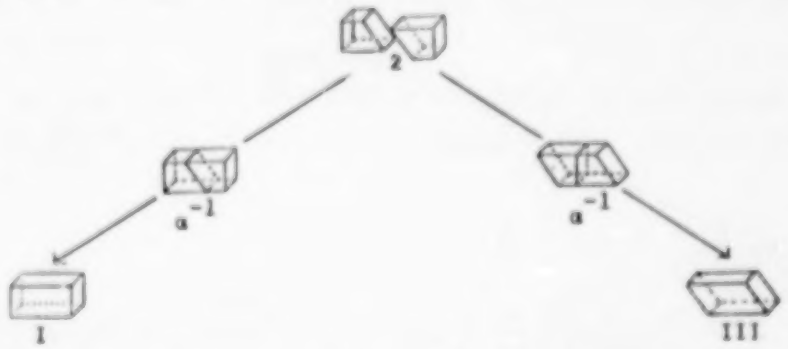


Creation — D. Lunkenbein
Realization of the material — H. Alberts, M. Zakrzewski
Editor — J. Roy
Drawings (and English translation) — P. Allard

Produced within a research project on the didactic of mathematics subsidized by the Ministère de l'Education du Québec, (F.C.A.C., EQ-5461); Département de mathématiques et d'informatique, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec, Canada, J1K 2R1.

4. Comparing the volume of parallelepipeds I, III and V.

The volume of parallelepipeds I, III and V can be compared by finding various ways of composing two congruent blocks. For example, by composing both blocks 2 in various ways, we can form parallelepiped I or parallelepiped III, which shows the equivalence of volume between the two blocks.



The same way, we can find an equivalence of volume between blocks I and V and between blocks III and V. Here is another illustration of blocks having different shapes but identical volume.

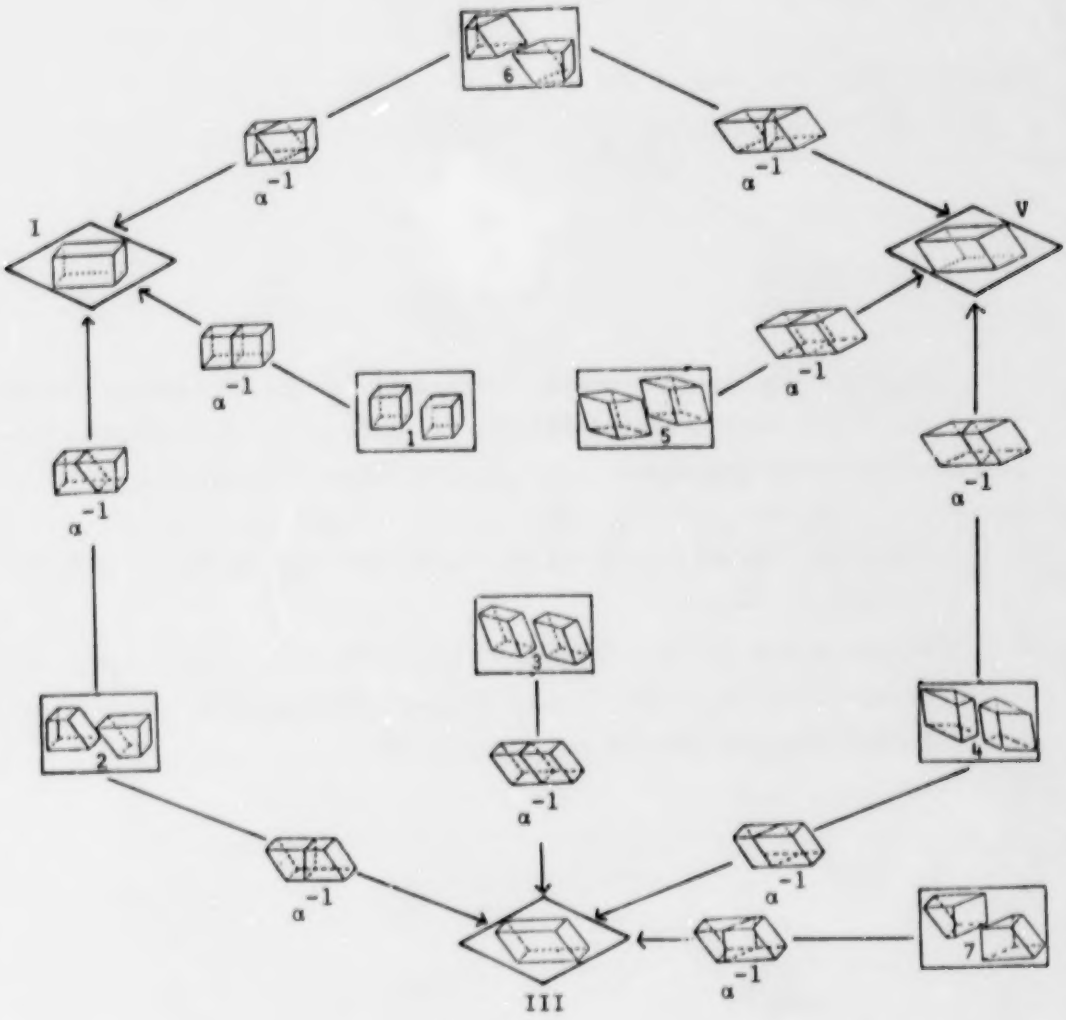
5. Comparing the volume of blocks II, IV and VI with that of parallelepipeds I, III and V.

Blocks II, IV and VI are formed through operation β, in other words by composing two non-congruent blocks. For example, block II can be formed from the joining of blocks 1 and 2:

Since blocks 1 and 2 have a volume equal to half of that of parallelepiped I, these two blocks together have therefore a volume equal to that of parallelipiped I. Thus, we can conclude that block II an parallelepiped I have the same volume, and so have parallelepipeds III and V. Through such a reasoning, we can establish an equivalence of volume between blocks IV, VI and the three parallelepipeds.

3. Comparing the volume of two small non-congruent blocks.

Such an activity can be made by using operation α^{-1}, in other words by looking for the various ways of recomposing parallelepipeds I, III and V.



This diagram illustrates the possibility of recomposing parallelepiped I from blocks 1, 2 or 6. Since all these blocks have a volume equal to half that of parallelepiped I, they all have the same volume. In the same way, we can establish an equivalence of volume between blocks 4, 5 and 6 as well as between blocks 2, 3, 4 and 7. By transitivity, we will thus conclude that blocks 1 to 7, through different in shape, have the same volume.

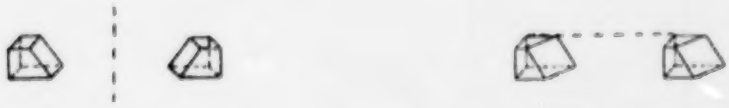
C Exploring the quantitative notion of volume in relation with the qualitative notion of shape

The following activities aim at using the material at hand to illustrate the various links existing between the notions of shape and volume.

1. Comparing the volume of the small blocks of a pair obtained through an α operation.

   Operation α made on blocks I, III and V generates seven pairs of small blocks, each pair of which is formed of two congruent blocks.

   Ex.:



congruence by symmetry

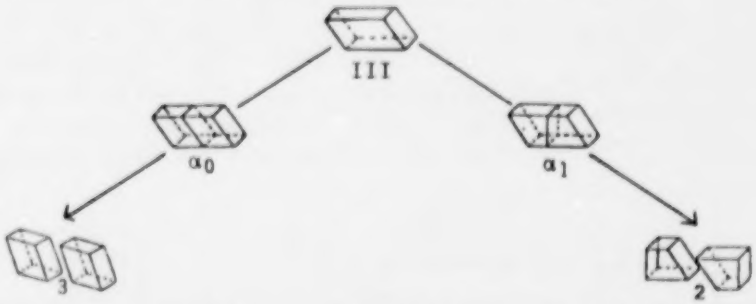
congruence by translation

   The two blocks in each pair, being congruent, have thus the same volume. Therefore, each of these pairs illustrates the relation "...having the same shape and the same volume...".

2. Comparing the volume of the small blocks in comparison with the large blocks from which they are taken.

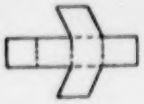
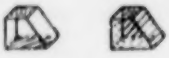
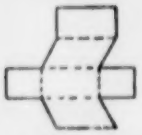
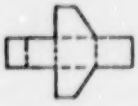
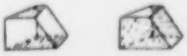
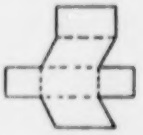
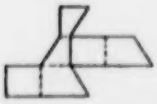
   By generating each time two small blocks of the same volume, operation α thus produces blocks whose volume is equal to half of that of the parallelepiped on which the operation was made.

   Ex.:



   This gives us an example of a change in volume without a change in shape (blocks III and 3), and an example of a change in volume as well as a change in shape (blocks III and 2).

B <u>Exploring the effects of the α operation on certain qualitative properties of the hexahedra</u>

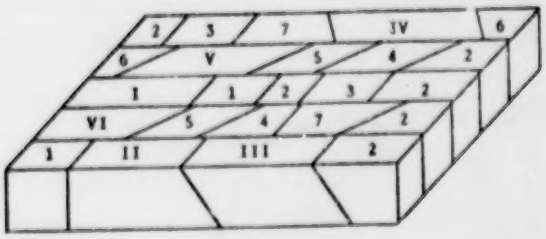
properties / operation	shape	number of pairs of parallel faces	number of parallelograms	prism
α_0	does not modify the shape	does not change the number of pairs of parallel faces	does not change the number of parallelograms 	keeps the prism quality
α_1	modifies the shape	decreases by one the number of pairs of parallel faces 	 decreases by two the number of parallelograms 	keeps the prism quality
α_2	modifies the shape	decreases by one the number of pairs of parallel faces 	 decreases by four the number of parallelograms 	does not keep the prism quality

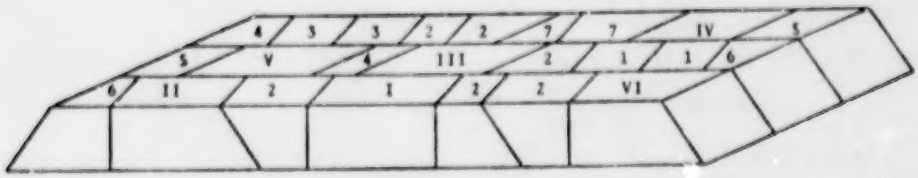
For further details concerning the qualitative properties of hexahedra of the "cube family", see the brochure entitled: HEXAHEDRA (8, 12).

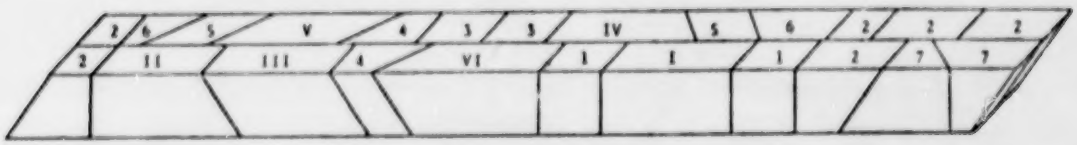
POSSIBLE ACTIVITIES

A Putting together tridimensional puzzles

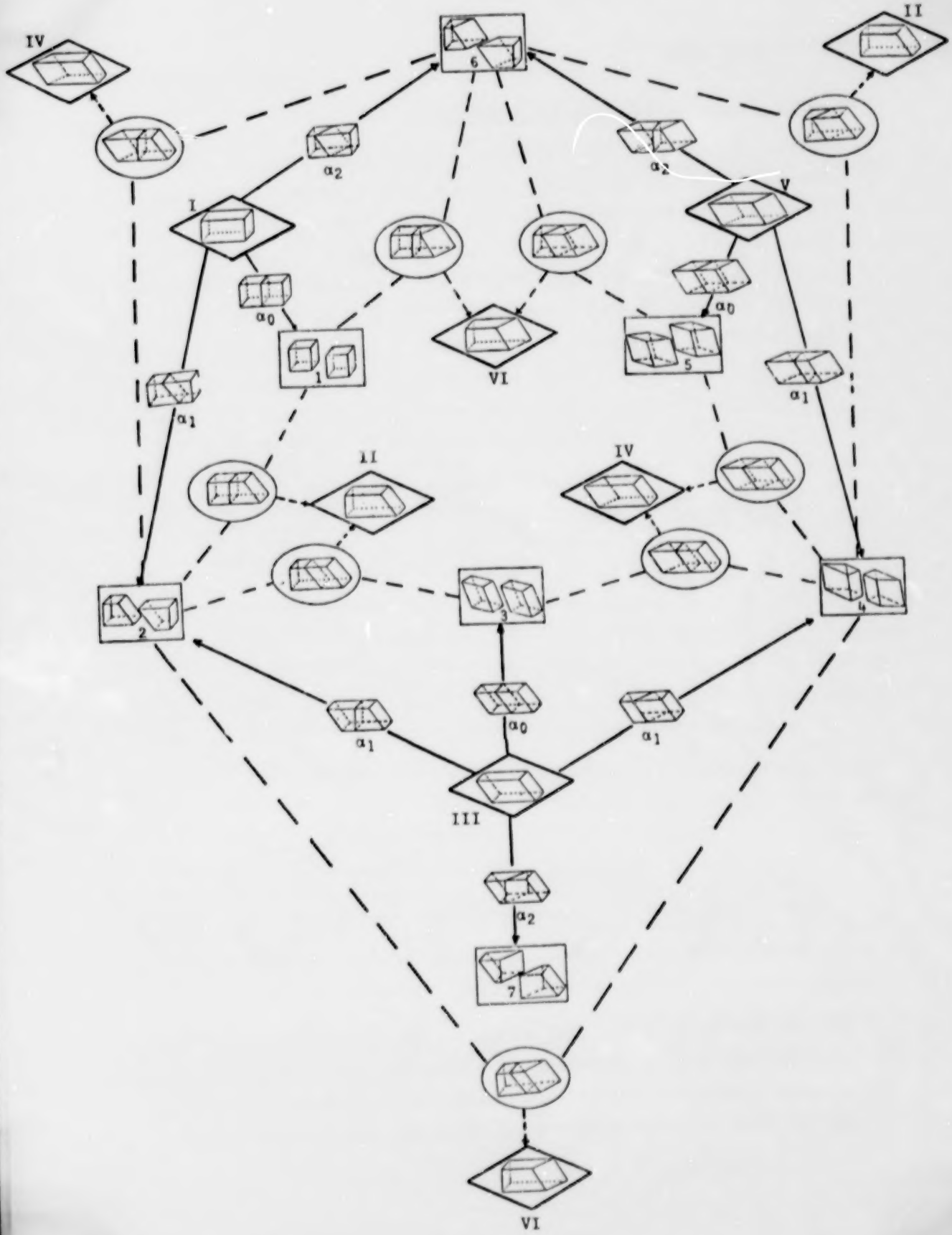
By giving each small block obtained through the α operation a single unit value, the whole set of blocks was originally made of 26 units (7 pairs of small blocks = 14 units, 6 large blocks = 12 units). Four blocks no 2 (4 units) were added in order to permit greater diversity in the puzzle activity. With this 30-unit set, one can piece together puzzles of the following dimensions: 1 by 30, 2 by 15, 3 by 10, 5 by 6. Here are a few examples:







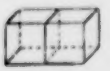
The realization of such a play activity enables the children to explore both the many ways of composing the blocks and the qualitative properties of those geometrical objects. Moreover, the various puzzles obtained are all made of the same blocks and therefore have the same volume.


IV
II
6
α_2
α_2
I
V
α_0
α_0
1
VI
5
α_1
α_1
II
IV
2
3
4
α_1
α_0
α_1
III
α_2
7
VI

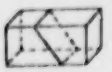
DETAILED DESCRIPTION

The material was built from the three basic parallelepipeds (I, III and V) each one of which was cut into two congruent halves. This cut which we have called α, is a straight cut that divides only the "large" faces of the parallelepipeds. We can find three types of α cut:

α_0: cut that runs parallel to the faces they don't touch ("small" faces); the affected faces remain parallelograms.



α_1: cut that has a simple inclination in relation to the non-affected faces. Two of the affected faces remain parallelograms and the other two become trapezoids.



α_2: cut that has a double inclination in relation to the non-affected faces; all the affected faces become trapezoids.

Through operation α, we have generated seven pairs of small blocks (from 1 to 7). Such a unary operation is symbolized on the next diagram by a simple arrow: ◇ $\xrightarrow{\alpha}$ □. When following the simple arrows in the opposite direction, we have the opposite operation α^{-1} which consists in joining two congruent parts in order to recompose the initial parallelepipeds.

Another operation called β consists in composing two non-congruent small blocks by joining the faces obtained through an α cut. Such a binary operation enables us to generate the hexahedra II, IV and VI. On the next diagram, it is symbolized in this way: □ ⋯ (β) ⋯→ ◇ .
□

The following diagram shows many possibilities of decomposition and recomposition. There are other blocks that could be generated through operations α and β. With their addition, the material would have been more complex and we felt it already contained a sufficient number of blocks to enable us to reach our main objective, that is, the discrimination between the notions of shape and volume.

SHAPES AND VOLUMES

GENERAL DESCRIPTION

This learning material allows the learner to make geometrical transformations in certain hexahedra and to observe their effect on a number of qualitative as well as quantitative properties of these hexahedra, and more specifically the quantitative property of volume. The transformations consist primarily in decomposing parallelepipeds into two congruent parts and in recomposing these latter ones into polyhedra of various shapes but whose volume always remains identical to that of the original parallelepipeds. The main goal of such activities is the discrimination between the notions of shape and volume. These notions may well be independent in the abstract but cannot exist independently in the reality from which they are drawn.